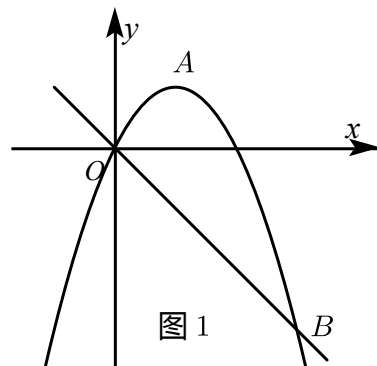
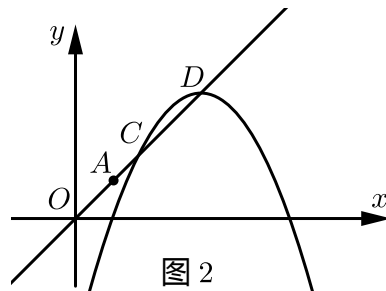


第3讲二次函数与定值问题（练习）

1. 如图1，已知抛物线 $y = -x^2 + mx + m - 2$ 的顶点为 A ，且经过点 $B(3, -3)$ 。



- (1) 求顶点 A 的坐标。
- (2) 若 P 是抛物线上且位于直线 OB 上方的一个动点，求 $\triangle OPB$ 的面积的最大值及此时点 P 的坐标。
- (3) 如图2，将原抛物线沿射线 OA 方向进行平移得到新的抛物线，新抛物线与射线 OA 交于 C, D 两点，请问：在抛物线平移的过程中，线段 CD 的长度是否为定值？若是，请求出这个定值；若不是，请说明理由。



【答案】 (1) $(1, 1)$ 。

(2) $S_{\triangle OPB}$ 的最大值为 $\frac{27}{8}$ ， $P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 。

(3) 是；定值为 $\sqrt{2}$ 。

【解析】 (1) 把 $B(3, -3)$ 代入 $y = -x^2 + mx + m - 2$ 得： $-3 = -3^2 + 3m + m - 2$ ，

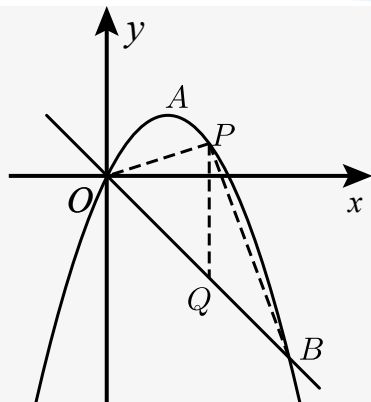
解得 $m = 2$ ，

$\therefore y = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1$ ，

$\therefore$ 顶点 A 的坐标是 $(1, 1)$ 。

(2) $\because$ 直线 OB 的解析式为 $y = -x$ ，过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴交直线 OB 于点 Q ，

故设 $P(n, -n^2 + 2n)$ ， $Q(n, -n)$ ，



$$\therefore PQ = -n^2 + 2n - (-n) = -n^2 + 3n ,$$

$$\therefore S_{\triangle OPB} = \frac{1}{2}(-n^2 + 3n) \times 3 = -\frac{3}{2}\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{8} ,$$

当 $n = \frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle OPB}$ 的最大值为 $\frac{27}{8}$.

$$\text{此时 } y = -n^2 + 2n = \frac{3}{4} ,$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right) .$$

$$\text{故答案为: } P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right) .$$

(3) $\because$ 直线 OA 的解析式为 $y = x$,

$$\therefore \text{可设新的抛物线解析式为 } y = -(x - a)^2 + a ,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -(x - a)^2 + a , \\ y = x \end{cases} ,$$

$$\therefore -(x - a)^2 + a = x ,$$

$$\therefore x_1 = a , x_2 = a - 1 ,$$

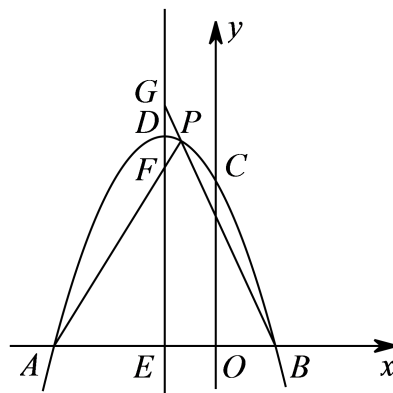
即 C 、 D 两点间的横坐标的差为 1 ,

$$\therefore CD = \sqrt{2} .$$

故答案为: 是 ; 定值为 $\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

2. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 A 、 B 两点 (A 在 B 的左侧), 且 $OA = 3$, $OB = 1$, 与 y 轴交于 $C(0, 3)$, 抛物线的顶点坐标为 $D(-1, 4)$.



- (1) 求 A, B 两点的坐标 .
- (2) 求抛物线的解析式 .
- (3) 过点 D 作直线 $DE \parallel y$ 轴, 交 x 轴于点 E , 点 P 是抛物线上 B, D 两点间的一个动点 (点 P 不与 B, D 两点重合), PA, PB 与直线 DE 分别交于点 F, G , 当点 P 运动时, $EF + EG$ 是否为定值? 若是, 试求出该定值. 若不是, 请说明理由 .

【答案】 (1) A 点坐标 $(-3, 0)$, B 点坐标 $(1, 0)$.

(2) $y = -x^2 - 2x + 3$.

(3) $EF + EG = 8$.

【解析】 (1) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 A, B 两点 (A 在 B 的左侧), 且 $OA = 3$, $OB = 1$,

得 A 点坐标 $(-3, 0)$, B 点坐标 $(1, 0)$.

(2) 设抛物线的解析式为 $y = a(x + 3)(x - 1)$,

把 C 点坐标代入函数解析式, 得:

$$a(0 + 3)(0 - 1) = 3,$$

解得 $a = -1$,

抛物线的解析式为 $y = -(x + 3)(x - 1) = -x^2 - 2x + 3$.

(3) 方法一: $EF + EG = 8$ (或 $EF + EG$ 是定值), 理由如下:

过点 P 作 $PQ \parallel y$ 轴交 x 轴于 Q , 如图:

$$\text{设 } P(t, -t^2 - 2t + 3),$$

$$\text{则 } PQ = -t^2 - 2t + 3, AQ = 3 + t, QB = 1 - t,$$

$$\because PQ \parallel EF,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle AQP,$$

$$\therefore \frac{EF}{PQ} = \frac{AE}{AQ},$$

$$\therefore EF = \frac{PQ \cdot AE}{AQ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-t^2 - 2t + 3) \times 2}{3 + t} \\
 &= \frac{2}{3 + t} \times (-t^2 - 2t + 3) \\
 &= 2(1 - t),
 \end{aligned}$$

又 $\because PQ \parallel EG$,

$\therefore \triangle BEG \sim \triangle BQP$,

$$\therefore \frac{EG}{PQ} = \frac{BE}{BQ},$$

$\therefore$

$$EG = \frac{PQ \cdot BE}{BQ} = \frac{(-t^2 - 2t + 3) \times 2}{1 - t} = 2(t + 3),$$

$\therefore EF + EG$

$$= 2(1 - t) + 2(t + 3)$$

$$= 8.$$

方法二：设 $P(t, -t^2 - 2t + 3)$.

$\because A(-3, 0), B(1, 0)$.

设 AP 的解析式为 $y = kx + s$,

$$\therefore \begin{cases} -3k + s = 0 \\ kt + s = -t^2 - 2t + 3 \end{cases}$$

$$\therefore k = 1 - t.$$

$$\therefore PA: y = (1 - t)(x + 3).$$

$$\text{令 } x = -1,$$

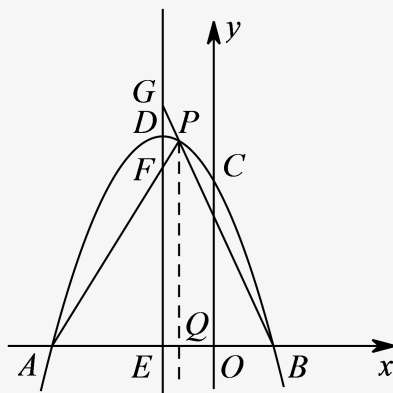
$$\therefore y_F = 2(1 - t).$$

$$\text{同理 } y_B = (-t - 3)(x - 1),$$

$$\text{令 } x = -1,$$

$$\therefore y_G = 2(t + 3),$$

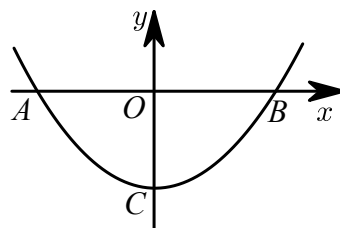
$$\therefore EF + EG = y_F + y_G = 2 - 2t + 2t + 6 = 8, \text{ 为定值.}$$



【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

3. 抛物线 $y = ax^2 + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，顶点为 C ，点 P 为抛物线上，且位于 x 轴下方。

(1) 如图，若 $P(1, -3)$ 、 $B(4, 0)$ ，

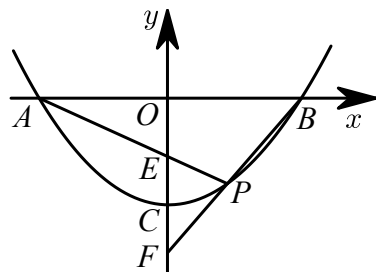


①

求该抛物线的解析式．

② 若 D 是抛物线上一点，满足 $\angle DPO = \angle POB$ ，求点 D 的坐标．

(2) 如图，已知直线 PA 、 PB 与 y 轴分别交于 E 、 F 两点．当点 P 运动时， $\frac{OE+OF}{OC}$ 是否为定值？若是，试求出该定值；若不是，请说明理由．



【答案】 (1) ① $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{16}{5}$
 ② $(-1, -3)$ 或 $(\frac{11}{4}, -\frac{27}{6})$.
 (2) $\frac{OE+OF}{OC}$ 是定值，等于2 .

【解析】 (1) ① 将 $P(1, -3)$ 、 $B(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + c$ 得

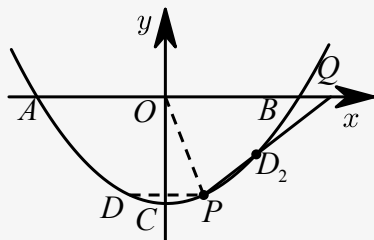
$$\begin{cases} 16a + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ c = -\frac{16}{5} \end{cases},$$

抛物线的解析式为： $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{16}{5}$.

② 方法一：由 $\angle DPO = \angle POB$ 得 $DP \parallel OB$ ，
 D 与 P 关于 y 轴对称， $P(1, -3)$ 得 $D(-1, -3)$.

如图， D 在 P 右侧，即图中 D_2 ，则 $\angle D_2PO = \angle POB$ ，
 延长 PD_2 交 x 轴于 Q ，



则 $QO = QP$ ，

设 $Q(q, 0)$ ，则 $(q-1)^2 + 3^2 = q^2$ ，

解得： $q = 5$ ，

$\therefore Q(5, 0)$ ，则直线 PD_2 为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$ ，

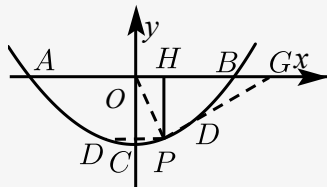
$$\text{再联立} \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} \\ y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{16}{5} \end{cases},$$

$$\text{得: } x = 1 \text{ 或 } \frac{11}{4},$$

$$\therefore D_2\left(\frac{11}{4}, -\frac{27}{16}\right).$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (-1, -3) \text{ 或 } \left(\frac{11}{4}, -\frac{27}{16}\right).$$

方法二：如图，



当点 D 在 OP 左侧时，

由 $\angle DPO = \angle POB$ ，

得 $DP \parallel OB$ ，

D 与 P 关于 y 轴对称， $P(1, -3)$ ，

得 $D(-1, -3)$ ；

当点 D 在 OP 右侧时，延长 PD 交 x 轴于点 G 。

作 $PH \perp OB$ 于点 H ，则 $OH = 1$ ， $PH = 3$ 。

$\therefore \angle DPO = \angle POB$ ，

$\therefore PG = OG$ 。

设 $OG = x$ ，则 $PG = x$ ， $HG = x - 1$ 。

在 $\text{Rt}\triangle PGH$ 中，由 $x^2 = (x - 1)^2 + 3^2$ ，得 $x = 5$ 。

$\therefore$ 点 $G(5, 0)$ 。

$\therefore$ 直线 PG 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$ ，

$$\text{解方程组} \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} \\ y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{16}{5} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{11}{4} \\ y_2 = -\frac{27}{16} \end{cases}.$$

$\therefore P(1, -3)$ ，

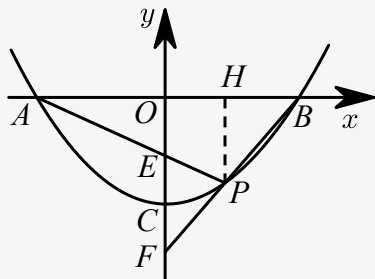
$\therefore D\left(\frac{11}{4}, -\frac{27}{16}\right)$ 。

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, -3)$ 或 $\left(\frac{11}{4}, -\frac{27}{16}\right)$ 。

(2) 方法一：设 $B(b, 0)$ ，则 $A(-b, 0)$ 有 $ab^2 + c = 0$ ，

$$\therefore b^2 = -\frac{c}{a},$$

过点 $P(x_0, y_0)$ 作 $PH \perp AB$ ，



$$\text{有 } y_0 = ax^2 + c,$$

易证: $\triangle PAH \sim \triangle EAO$,

$$\text{则 } \frac{OE}{OA} = \frac{PH}{HA} \text{ 即 } \frac{OE}{b} = \frac{-y_0}{x_0 + b},$$

$$\therefore OE = \frac{-by_0}{x_0 + b},$$

$$\text{同理得 } \frac{OF}{OB} = \frac{PH}{BH},$$

$$\therefore \frac{OF}{b} = \frac{-y_0}{b - x_0},$$

$$\therefore OF = \frac{-by_0}{b - x_0}, \text{ 则 } OE + OF = -by_0 \cdot \left(\frac{1}{b + x_0} + \frac{1}{b - x_0} \right).$$

$$\therefore OE + OF = \frac{-2b^2y_0}{b^2 - x_0^2} = \frac{-2 \cdot \left(-\frac{c}{a}\right) \cdot y_0}{-\frac{c}{a} - \frac{y_0 - c}{a}} = -2c,$$

$$\text{又 } OC = -c,$$

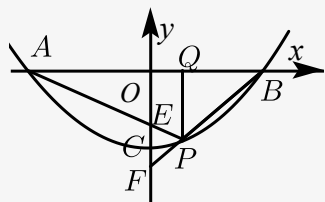
$$\therefore \frac{OE + OF}{OC} = \frac{-2c}{-c} = 2.$$

$$\therefore \frac{OE + OF}{OC} \text{ 是定值, 等于 } 2.$$

方法二: 点P运动时, $\frac{OE + OF}{OC}$ 是定值, 定值为2,

理由如下:

作 $PQ \perp AB$ 于Q点,



$$\text{设 } P(m, am^2 + c), A(-t, 0), B(t, 0),$$

$$\text{则 } at^2 + c = 0, c = -at^2.$$

$$\therefore PQ \parallel OF,$$

$$\therefore \frac{PQ}{OF} = \frac{BQ}{BO},$$

$$\therefore OF = \frac{PQ \cdot BO}{BQ} = -\frac{(am^2 + c)t}{t - m} = \frac{(am^2 - at^2)t}{m - t} = amt + at^2.$$

$$\text{同理 } OE = -amt + at^2.$$

$$\therefore OE + OF = 2at^2 = -2c = 2OC.$$

$$\therefore \frac{OE + OF}{OC} = 2.$$

方法三：设 P 的坐标为 (x_0, y_0) ， $y_0 < 0$ ，则 AP 的解析式

$$y = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{-\frac{c}{a}}}x + \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{-\frac{c}{a}}} \cdot \sqrt{-\frac{c}{a}},$$

$$BP \text{ 的解析式为 } y = \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{-\frac{c}{a}}}x - \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{-\frac{c}{a}}} \cdot \sqrt{-\frac{c}{a}},$$

$$\text{所以 } E \text{ 的坐标为 } \left(0, \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{-\frac{c}{a}}} \cdot \sqrt{-\frac{c}{a}} \right), F \text{ 的坐标为}$$

$$\left(0, -\frac{y_0}{x_0 - \sqrt{-\frac{c}{a}}} \cdot \sqrt{-\frac{c}{a}} \right),$$

$$\text{所以 } \frac{OE + OF}{OC} = \frac{-\frac{y_0}{x_0 + \sqrt{-\frac{c}{a}}} \cdot \sqrt{-\frac{c}{a}} + \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{-\frac{c}{a}}} \cdot \sqrt{-\frac{c}{a}}}{-c}$$

$$= \frac{2y_0}{ax_0^2 + c},$$

由于 P 在抛物线上，所以有 $y_0 = ax_0^2 + c$ ，

代入得 $\frac{OE + OF}{OC} = 2$ ，为定值。

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

4. 抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 与 x 轴交于 M 、 N 两点（ M 在 N 左侧），点 P 为 x 轴上方的抛物线上一动点，作 $PQ \perp x$ 轴于 Q ，试证明： $\frac{PQ}{MQ} + \frac{PQ}{NQ}$ 的值是一个定值。

【答案】证明见解析。

【解析】设 $y = -(x - a)(x - b)$ ，

$$M(a, 0), N(b, 0),$$

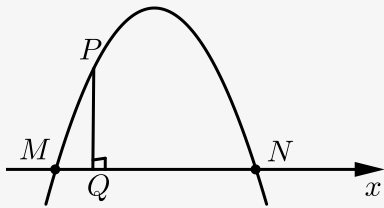
$$P(P, -(P - a)(P - b)),$$

$$MQ = P - a, QN = b - P,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{PQ}{MQ} + \frac{PQ}{NQ} &= \frac{-(P - a)(P - b)}{P - a} + \frac{-(P - a)(P - b)}{b - P}, \end{aligned}$$

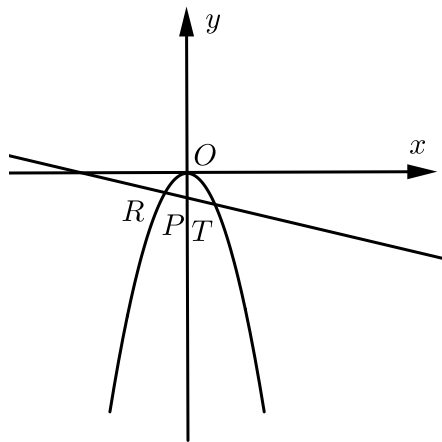
$$= b - P + P - a = b - a ,$$

$= x_N - x_M$ 为定值 .



【标注】【知识点】二次函数与动点问题

5. 已知抛物线 $y = -x^2$, 点 $P\left(0, -\frac{1}{4}\right)$, 过点 P 任做一直线 m 与抛物线交于 R 、 T 两点 , 证明 $\frac{RT}{PR \cdot PT}$ 的值为定值 .



【答案】证明见解析 .

【解析】设直线解析是为 $y = kx - \frac{1}{4}$,

$$\text{则} \begin{cases} y = kx - \frac{1}{4} \\ y = -x^2 \end{cases} ,$$

$$\text{整理的} x^2 + kx - \frac{1}{4} = 0 .$$

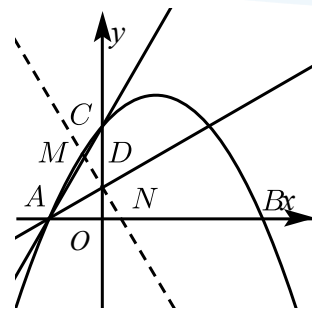
$$\begin{cases} x_R x_T = -\frac{1}{4} \\ x_R + x_T = -k \end{cases} ,$$

$$\text{可得} x_T - x_R = \sqrt{k^2 + 1} .$$

$$\frac{RT}{PR \cdot PT} = \frac{(x_T - x_R) \sqrt{k^2 + 1}}{-x_R x_T \cdot (k^2 + 1)} = \frac{k^2 + 1}{\frac{1}{4}(k^2 + 1)} = 4 .$$

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

6. 如图 , 已知二次函数 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左边) , 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 且抛物线的对称轴为直线 $x = \sqrt{3}$.



(1) 直接写出 b 的值及点 A 的坐标.

(2) $\angle BAC$ 的平分线交 y 轴于点 D , 过点 D 的直线 l 与射线 AC , AB 分别交于点 M , N .

① 直接写出: $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AO} = \underline{\hspace{2cm}}$.

② 当直线 l 绕点 D 旋转时, $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ 是否为定值, 若是, 求出这个值; 若不是, 说明理由.

【答案】 (1) $(-\sqrt{3}, 0)$.

(2) ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$
② $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \sqrt{3}$,

$$\therefore -\frac{b}{2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{3},$$

$$\text{解得 } b = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

将点 $C(0, 3)$ 代入 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 得 $c = 3$,

$$\text{所以, } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 3,$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 3 = 0,$$

$$\text{整理得, } x^2 - 2\sqrt{3}x - 9 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 3\sqrt{3},$$

所以, 点 A 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 0)$.

故答案为: $(-\sqrt{3}, 0)$.

(2) ① $\because$ 点 A 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 0)$,

$$\therefore AO = \sqrt{3},$$

点 $C(0, 3)$,

$$\therefore OC = 3,$$

根据勾股定理得,

$$AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{所以, } \frac{1}{AC} + \frac{1}{AO} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \text{ 为定值 } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

理由如下: 如图, 过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 x 轴于 E ,

则 $\angle ADE = \angle CAD$,

$\because \angle BAC$ 的平分线交 y 轴于点 D ,

$\therefore \angle CAD = \angle OAD$,

$\therefore \angle OAD = \angle ADE$,

$\therefore DE = AE$,

$\therefore DE \parallel AC$,

$\therefore \triangle NED \sim \triangle ANM$,

$$\therefore \frac{EN}{AN} = \frac{DE}{AM},$$

由图可知, $EN = AN - AE$,

$$\frac{EN}{AN} = \frac{AN - AE}{AN} = \frac{AN - DE}{AN} = 1 - \frac{DE}{AN},$$

$$\therefore 1 - \frac{DE}{AN} = \frac{DE}{AM},$$

$$\text{整理得, } \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{DE},$$

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{CO}{AO} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ,$$

$\therefore \angle BAC$ 的平分线与 y 轴相交于点 D ,

$$\therefore \angle DAO = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore DO = AO \cdot \tan \angle DAO = \sqrt{3} \times \tan 30^\circ$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,$$

$\therefore DE \parallel AC$,

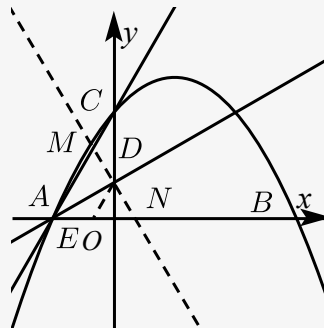
$$\therefore \angle DEO = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore DE = DO \div \sin \angle DEO = 1 \div \sin 60^\circ = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

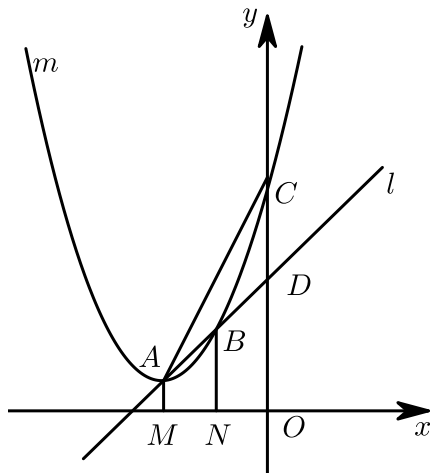
$$\therefore \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

7. 已知抛物线 $m: y = x^2 + bx + c$ 与直线 $l: y = x + 2$ 交于 A, B 两点, 交 y 轴于点 C , 直线 l 交 y 轴于点 D .
- (1) 若 A 为抛物线顶点, 且 $b = c$, 求 b 的值.
- (2) 连接 AC, BC , 若点 B 在第二象限, $\angle ACD = \angle CBD$, 求点 C 的坐标.
- (3) 若 A, B 均在 x 轴上方, 分别过点 A, B 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 M, N , 当 c 取某一确定值时, 对于任意的 b 的可能取值, $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN}$ 的值恒为定值, 求此时 c 和 $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN}$ 的值.



【答案】(1) 2, 4.

(2) (0, 4).

(3) 恒定为 $\frac{1}{2}$.

【解析】(1) 若 $b = c$ 时: $A\left(-\frac{b}{2}, \frac{4c-b^2}{4}\right)$, 即为: $\left(-\frac{b}{2}, b - \frac{1}{4}b^2\right)$, 代入 $y = x + 2$ 上

得:

$$-\frac{b}{2} + 2 = b - \frac{1}{4}b^2,$$

$$\therefore \frac{1}{4}b^2 - \frac{3}{2}b + 2 = 0,$$

$$\therefore b^2 - 6b + 8 = 0,$$

$$\therefore (b-2)(b-4) = 0,$$

$$\therefore b = 2 \text{ 或 } b = 4.$$

故答案为: 2, 4.

(2) 由 $\angle ACD = \angle CBD$ 得: $\triangle DCA \sim \triangle DBC$, $\therefore CD^2 = BD \cdot AD$,

设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$,

$$\therefore \begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow x^2 + (b-1)x + c-2 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 1 - b, x_1 x_2 = c - 2, \text{ 易知: } CD = c - 2,$$

$$BD = \sqrt{2}(0 - x_2) = -\sqrt{2}x_2,$$

$$AD = \sqrt{2}(0 - x_1) = -\sqrt{2}x_1,$$

$$\therefore (c - 2)^2 = 2x_1 x_2 = 2(c - 2),$$

$$\therefore (c - 2)(c - 4) = 0,$$

$$\therefore c = 2 \text{ (舍)} \text{ 或 } c = 4,$$

故答案为: $(0, 4)$.

$$(3) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow x^2 + (b - 1)x + c - 2 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 1 - b, x_1 x_2 = c - 2, \text{ 而 } \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2},$$

$$\text{其中: } y_1 + y_2 = x_1 + 2 + x_2 + 2 = x_1 + x_2 + 4 = 5 - b,$$

$$y_1 y_2 = (x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = c - 2 + 2(1 - b) + 4 = c - 2b + 4$$

$$\therefore \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} = \frac{5 - b}{c - 2b + 4} = \frac{5 - b}{c + 4 - 2b} \text{ 恒为定值},$$

$$\therefore c + 4 = 10,$$

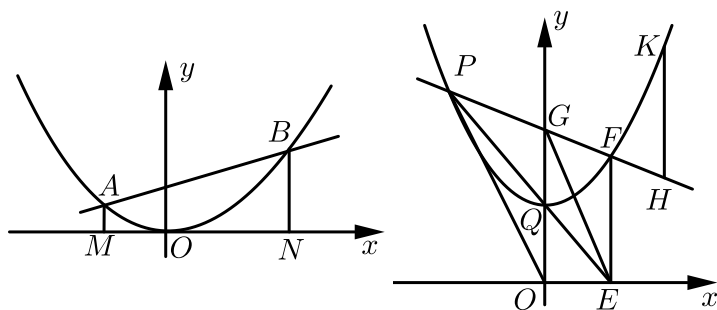
$$\therefore c = 6,$$

$$\text{此时: } \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} = \frac{1}{2}.$$

故答案为: 恒定值为 $\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

8. 已知抛物线 $C_1: y = ax^2$ 与直线 $y = 2x - 1$ 只有一个公共点.



(1) 求 a 的值.

(2) 直线 $y = kx + \frac{1}{4}$ 与抛物线交于点 A, B , 分别过点 A, B 作 $AM \perp x$ 轴于点 $M, BN \perp y$ 轴于点 N , 试问 $AB - AM - BN$ 的值是否发生变化. 如果变化, 请求出其取值范围, 如果不变, 请求出其值.

(3) 将抛物线上 C_1 向上平移 1 个单位长度后得到新抛物线 C_2 , 点 P 为对称轴左侧抛物线上一动点, 点 Q 为新抛物线的顶点, PQ 交 x 轴于点 E , 过点 E 作 $EF \perp x$ 轴交 C_2 于点 F , 直线 PF 交 y 轴于

点 G ，连接 GE 、 PO ， $EG \parallel OP$ ，点 K 为对称轴右侧抛物线上一动点，过点 K 作 $KH \parallel y$ 轴交直线 PF 于点 H ，求证： $\frac{FH \cdot PH}{KH}$ 的值为定值。

【答案】(1) $a = 1$.

(2) $\frac{1}{2}$.

(3) $\frac{FH \cdot PH}{KH} = 1$

【解析】(1) 联立 $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ 得 $ax^2 - 2x + 1 = 0$,

$$\Delta = 4 - 4a = 0 ,$$

$$a = 1 .$$

(2) 设 $A(x_1, kx_1 + \frac{1}{4})$ 、 $B(x_2, kx_2 + \frac{1}{4})$,

联立 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx + \frac{1}{4} \end{cases}$ 得 $x^2 - kx - \frac{1}{4} = 0$,

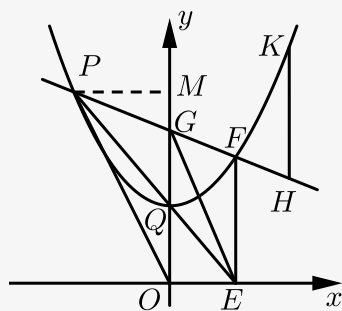
$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases} ,$$

$\therefore$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (kx_1 - kx_2)^2} = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = k^2 + 1$$

$$\therefore AB - AM - BN = k^2 + 1 - k(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

(3) 由题意可知 $C_2: y = x^2 + 1$,



$$\therefore Q(0, 1) ,$$

$$\text{设 } P(m, m^2 + 1) ,$$

过点 P 作 $PM \perp y$ 轴于点 M ,

$$\therefore \triangle PQM \sim \triangle EQO ,$$

$$\therefore \frac{EO}{QO} = \frac{PM}{QM} = -\frac{1}{m} ,$$

$$\therefore E\left(-\frac{1}{m}, 0\right) ,$$

$$\therefore F\left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2} + 1\right) ,$$

又 $\because EG \parallel OP$,

$\therefore \triangle PMO \sim \triangle EOG$,

$$\therefore \frac{OG}{MO} = \frac{EO}{PM} = \frac{1}{m^2},$$

$$\therefore G\left(0, \frac{1}{m^2} + 1\right),$$

$\therefore GF \parallel x$ 轴,

$$\therefore m^2 + 1 = \frac{1}{m^2} + 1,$$

解得 $m_1 = -1$ 、 $m_2 = 1$ (舍),

$\therefore P(-1, 2)$ 、 $G(0, 2)$ 、 $F(1, 2)$.

设 $H(n, 2)$ 、 $K(n, n^2 + 1)$,

则 $FH = |n - 1|$ 、 $PH = |n + 1|$ 、 $KH = |n^2 - 1|$,

$$\therefore \frac{FH \cdot PH}{KH} = \frac{|(n + 1)(n - 1)|}{|n^2 - 1|} = \frac{|n^2 - 1|}{|n^2 - 1|} = 1.$$

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合